Univ.-Prof. Dr. Uwe Schmock
Finanz- und Versicherungsmathematik
Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Wien

8. März 2019

Gutachten zur Diplomarbeit von Herrn Martin Schmidt

„Aggregation of Integer-Valued Risks with Copula-Induced Dependency Structure"

Herr Martin Schmidt arbeitet für die ING-DiBa Austria und hatte großes Interesse an einer entsprechenden Fragestellung mit Praxisbezug. Das oben genannte Thema mit Anwendungen bei der Aggregation von Versicherungs- oder Kreditrisiken bot sich daher an, insbesondere im Zusammenhang mit rekursiven numerischen Methoden wie der Panjer-Rekursion oder dem darauf aufbauenden erweiterten CreditRisk$^+$, das ich im Rahmen meiner VU *Kreditrisikomodelle und -derivate* unterrichte.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf d Risiken $X_1, \ldots, X_d$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$, und betrachtet das aggregierte Risiko $S := X_1 + \cdots + X_d$ unter verschiedenen Annahmen an die Abhängigkeitsstruktur. Nach dem Satz von Sklar lässt sich die Verteilungsfunktion des diskreten Zufallsvektors $(X_1, \ldots, X_d)$ stets beschreiben durch die Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_d$ der eindimensionalen Randverteilungen und einer Copula $C : [0,1]^d \ni u \mapsto C(u)$ mittels

$$\mathbb{P}(X_1 \le n_1, \ldots, X_d \le n_d) = C\big(F_1(n_1), \ldots, F_d(n_d)\big), \qquad n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}_0.$$

Hierbei ist die Copula C nicht eindeutig, weil die Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_d$ im vorliegenden Fall nicht stetig sondern nur durch Sprünge wachsen. Entsprechend beleuchtet Kapitel 2 der Arbeit die Copulatheorie unter besonderer Berücksichtigung dieses Gesichtspunkts. Das Kapitel wird durch zahlreiche Konstruktionen und Beispiele für Copulas, insbesondere auch asymmetrischer Copulas, abgeschlossen.

Kapitel 3 behandelt die gängigen Abhängigkeitsmaße, insbesondere also lineare Korrelation und rankbasierte Korrelationsmaße wie Kendalls τ und Spearmans ϱ.

Kapitel 4 beinhaltet den mathematischen Kern der Diplomarbeit. Das angestrebte Ziel war, die bekannte Methode für die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto p_n := \mathbb{P}(S = n)$ der Verteilung von S im Fall der Unabhängigkeit der Einzelrisiken $X_1, \ldots, X_d$, nämlich die Faltungsformel

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_1 + \cdots + n_d = n}} \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(X_i = n_i), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \qquad (*)$$

auf möglichst allgemeine Abhängigkeitsstrukturen, also auf Copulas zu übertragen. Ersatzweise kann natürlich auch die Verteilungsfunktion $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto \mathbb{P}(S \le n)$ berechnet werden. Für diesen letzten Fall gibt Proposition 4.2 ein entsprechendes Resultat. Unter Verwendung der Hilfsgrößen

$$c_n := \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_1 + \cdots + n_d = n}} C\big(F_1(n_1), \ldots, F_d(n_d)\big), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

für deren Berechnung der numerische Aufwand mit dem von $(*)$ vergleichbar ist, gibt Proposition 4.3 das Resultat

$$\mathbb{P}(S \leq n) = \sum_{k=0}^{\min\{d-1,n\}} (-1)^k \binom{d-1}{k} c_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{$**$}$$

woraus sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto p_n = \mathbb{P}(S \leq n) - \mathbb{P}(S \leq n-1)$ leicht berechnet. Eine direkte Rekursionsformel ist in Theorem 4.8 gegeben, nämlich

$$p_n = c_n - \sum_{k=1}^{n} \binom{k+d-1}{d-1} p_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Resultate hat Herr Schmidt selbst formuliert und bewiesen (wobei einige Beweise mit meiner Hilfe noch vereinfacht werden konnten). Eine weitere Folgerung basierend auf $(**)$ ist Proposition 4.9:

$$p_n = \sum_{k=0}^{\min\{d,n\}} (-1)^k \binom{d}{k} c_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

der rechnerische Aufwand im Vergleich zu $(*)$ ist nur geringfügig höher, die Anzahl der Summanden durch die Dimension des Zufallsvektors nach oben begrenzt. Leider besteht bei der Anwendung all dieser Resultate das (zumindest bisher) unvermeidliche Problem der Auslöschung; es müssen die einzelnen Terme und ihre Differenzen also mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Ferner eignen sich diese Resultate primär für formelmäßig explizit gegebene Copulas; für Copulas, die über eine Dichte numerisch berechnet werden, sind andere Formeln hilfreicher, vgl. (4.13).

Nach Kapitel 5 (Risikomaße für die Summe $S = X_1 + \cdots + X_d$) ist Kapitel 6 essentieller Bestandteil der Diplomarbeit. Hier werden die theoretischen Resultate konkret für verschiedene Copulas und Randverteilungen implementiert (der R-Code ist beigefügt), illustriert und mit entsprechenden Schranken verglichen (die sich mit dem Rearrangement-Algorithmus ergeben). Diese Beispiele spiegeln sehr gut das Modellrisiko aufgrund der verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen und können für die praktische Anwendung wegleitend sein.

Zusammenfassend ist die Diplomarbeit von Herrn Martin Schmidt ein sehr interessantes Werk mit neuen theoretischen Erkenntnissen, die er zum großen Teil eigenständig gefunden und bewiesen hat, und zahlreichen illustrierenden Beispielen. Er hat über seine Arbeit bereits in unserem Seminar vorgetragen. Die Diplomarbeit ist mit großer Sorgfalt verfasst. Ich beabsichtige, die erzielten theoretischen Resultate in meine Kreditrisikovorlesung einfließen zu lassen und in meine Lecture Notes aufzunehmen. Ich benote die Arbeit mit **Sehr Gut**.